Elementarna matematika 1

Vježbe 10

Neka je funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana ovako: $\varphi(n)$ je jednak broju elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji su relativno prosti s n. Funkciju φ zovemo **Eulerova funkcija**.

Propozicija

Vrijede sljedeća svojstva Eulerove funkcije:

(1) Ako su $a, b > 1$ prirodni brojevi takvi da je $M(a, b) = 1$, onda je $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

(2) Ako je p prost broj i $k \geq 1$, onda je $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

Teorem
Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ rastav broja n na proste faktore. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\
&= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 2})\cdots(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}) \\
&= p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_k - 1).
\end{aligned}$$

Teorem (Eulerov teorem)
Neka je $n \in \mathbb{N}$, te $a \in \mathbb{Z}$ takav da je $M(a, n) = 1$. Tada vrijedi

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Teorem (Mali Fermatov teorem)
Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj, te $a \in \mathbb{Z}$ takav da $p \nmid a$. Tada vrijedi

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Zadatak 1. Odredite posljednju znamenku broja

$$7^{1998^{1997}} + 3^{1998^{1997}}.$$

Zadatak 2. Dokažite da je broj $2222^{5555} + 5555^{2222}$ djeljiv sa 7.

Zadatak 3. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $140^{67} + 153^{51}$ brojem 17.

Zadatak 4. Dokažite da $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{2n+2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Z}$ takvi da je $M(a, n) = 1$. Pretpostavimo da je $d \in \mathbb{N}$ najmanji prirodni broj za koji vrijedi

$$a^d \equiv 1 \pmod{n}.$$

Dokažite: ako je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a^m \equiv 1 \pmod{n}$, tada d dijeli m.

Zadatak 6. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $3^{105} + 4^{105}$ brojem 13.

Zadatak 7. Neka je p prost broj koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Dokažite da ne postoji cijeli broj x takav da $p \mid x^2 + 1$.

Zadatak 8. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $4m+1$, $m \in \mathbb{N}$.

Zadatak 9. Dokažite da za svaki prost broj p vrijedi

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

Zadatak 10. Neka je 3^k potencija broja 3 koja ima m znamenaka. Dokažite da postoji veća potencija broja 3 kojoj se zadnjih m znamenaka poklapa sa znamenkama od 3^k.

Zadatak 11.

(a) Odredite sve ostatke koje potencije broja 2 mogu davati pri dijeljenju sa 7.

(b) Dokažite da jednadžba $2^n + 1 = 11m^6$ nema prirodnih rješenja.

Zadatak 12. Odredite zadnje tri znamenke broja 5^{2024}.

Zadatak 13. Odredite sve proste brojeve p takve da $p \mid 29^p + 1$.

Zadatak 14. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $7^n - 2^n - 9$ kvadrat prirodnog broja.